المكونات الاساسية والقواعد الاستنتاجية في منطق الرتبة الاولى

Foundations and logical inference Rules in First Order Logic

م.د ليث أثير يوسف

كلية الآداب/ الجامعة المستنصرية

ملخص البحث

كان الهدف من البحث بيان منطق الرتبة الاولى ومكوناته ورموزه وصيغه ومصطلحاته وكل مايتعلق به لما يمثل من اهمية في اوساط المنطق الرياضي وأهميته في حياتنا العملية فهذا المنطق له صيغ خاصة وطريقة في كتابة الرموز تختلف عن بقية حقول المنطق الرياضي فالمحمول هو من سيحدد شكل المصطلح وسيسلك في داخل الصيغة سلوك وظائف (دالية)(functional) والصيغة المعقدة تحتوي على اكثر من محمول فيها اضافة الى الاسوار التي ستحدد القضية من ناحية (الكم) ناهيك عن الية قيم صدق وكذب المصطلح والصيغ في هذا المنطق عن طريق منهج التفسير (interpretation) والحقيقة ان هذا النهج غريب وغير معروف في اوساط الاليات الرمزية والانساق المنطقية في منطق القضايا سواء بصيغه البسيطة أو المعقدة فقيم الصدق (ثنائية القيم) هي ستحدد صدق الصيغ ، كما ان لمنطق الرتبة الاولى اساسات جعلت منه منطلقاً لاقامة منطق الرتبة الثانية (second order logic)[1] وهو النموذج المطور بالياته البرهانية وصيغه المعقدة عن الاول وكذلك اعتبر منطق الرتبة الاولى منطلقا لاقامة نظرية النماذج أو النمذجة (models theory)[2] تلك النظرية الرياضية التي تجمع مابين المجموعات الكلية في نظرية المجموعات والصيغ الجبرية بالاضافة الى ان منطق الرتبة الاولى ذا اهمية في تكوين لغات البرمجة المنطقية (logical programming language) ومنها لغة برولوغ (prolog) الشهيرة التي تعتمد بالاساس على هذا المنطق في بناء وتفسير صيغها وكذلك في مجال الذكاء الصناعي (artificial intelligence) . لذا كان من الضروري تقديم بيان ملخص ومفصل عن مكونات هذا النوع من المنطق الرياضي وشرح الياته الرياضية والمنطقية

المقدمة

يُعد منطق الرتبة الاولى (first order logic) أو يسمى ايضاً بمنطق المحمولات (predicate logic) من المواضيع المهمة والحيوية في ميادين علوم الحاسبات والذكاء الصناعي كما له اهمية قصوى في علوم الرياضيات فيستخدم في مواضيع الجبر والجبر الخطي والاعداد وغيرها من الفروع وهو حقل من حقول المنطق الرياضي ويمت بصلة قوية لمنطق العلاقات (ropositional logic) أو منطق الجمل ،وقد استخدم هذا المنطق في تطوير لغة البرمجة (Prolog) وهي من اللغات المنطقية التي تعتمد بصورة تامة على منطق المحمولات وتفسر النتائج على وفق نظام ذكي متطور وقد دفعني الاهتمام بهذا المنطق المصادر والمحاضرات التي حصلت عليها من كتب وابحاث من مكتبات اجنبية وكانت حافزا جيداً للتعرف على هذا المنطق الذي يشكل اهمية ضمن انواع المنطق الرياضي وغرابة تكوينه الرمزي والداخلي كونه يستخدم ادوات خاصة به وللأسف لايوجد ضمن عالمنا العربي مصادر مترجمة الى اللغة العربية سوى بعض المحاضرات في قسم الحاسوب والرياضيات وخصوصاً جامعة بيرزوت في فلسطين وقد قام الاستاذ الدكتور مصطفى جرار بعرض محاضرات حول منطق الرتبة الاولى على النت على شكل ملف فديو تفاعلي مع طلابه الا ان الموضوع لم يكن مرضياً لي فالمنطق عموماً يشكل لبنة اساسية في الفلسفة اولا ومن ثم يرتبط بعلم الرياضيات وتطبيقات الحاسوب من ناحية اخرى فقمت بكتابة هذا البحث محاولاً عرضه بطريقة اقرب للفهم وابسط اعتماداً على ما تحت يدي من المصادر والمراجع المهمة وقد قمت بتفصيل البحث محاولا

عرض الموضوع عرضاً مفيدا ومختصراً كونه يحمل في طياته الكثير الكثير من التفاصيل والتفرعات وقمت بدأً بشرح مفهوم منطق الرتبة الاولى ومن ثم عرضت لأهم مكوناته وكيفية كتابة قضاياه وفق النظام المنطقي والرياضي ومن ثم عرضت لقضية الاسوار (quantifiers) ومدى اهميتها كونها من اهم الرموز المستعملة في هذا النوع من المنطق وبعدها قسمت البناء الداخلي لمنطق الرتبة الاولى الى فرعين :الاول اسميته بالدوال والعلاقات السنتاكتية في منطق الرتبة الاولى كون السينتاكس (Syntax) يشمل كل المعاني الرمزية والعلاقات والروابط والبناء الرياضي والثاني يشكل العمود الاساسي لمنطق الرتبة الاولى الا وهو السيمانتك (Semantic) الذي ينطوي تحته كل التفسير (Interpretation) وقيم الصدق والكذب وغيرها فلا يمكن فهم هذا المنطق الا عن طريق هذين المكونين السابقين واخيراً انهيت البحث بالقواعد الاستنتاجية المنطقية وطريقة البرهنة بالاعتماد والاستعانة بقوانين منطق القضايا وبعض البديهيات الخاصة بهذا المنطق كونه يمثل علامة مميزة في حقول المنطق الرياضي ويتفرد ببديهيات ونظام داخلي مميز ،اتمنى ان اكون وفقت بتقديم شرح موجز ومبسط حول منطق الرتبة الاولى ومتمنيا ان يكون مفيدا في مؤسساتنا الرياضية والمنطقية خدمة لبلدنا العزيز ..

منطق الرتبة الاولى (FOL)

منطق الرتبة الاولى (First order logic) أو يسمى احياناً بمنطق المحمولات (predicate logic) هو نظام رمزي أو حساب منطقي يُعرِف أو يشير الى الموضوع والمحمول في القضية لكنه لايشير ابداً الى القضية المنطقية كما هو الحال في منطق القضايا او منطق الجمل (propositional logic) وكلا النظامين السابقين يتألفان من مجاميع من الموضوعات والمحمولات ومتغيرات وثوابت وأسوار وبالاضافة الى الروابط المنطقية (operators)[٣] ومنطق الرتبة الاولى كما يعرفه مندلسون هو منطق مشتق من لغة صحيحة البناء (Well-formed formulas) ويسمى احياناً هذا النوع من المنطق بلغة الرتبة الاولى (first –order language) [٤] وهذا النظام الرمزي يختلف عن بقية الانظمة الرمزية والمنطقية الاخرى بإحتوائه على المتغيرات المسورة (quantified) وهي على نوعين أسوار كلية (universal) وأسوار جزئية (Existential) وهذه الاسوار قد تكون دوالاً أو روابط أو علاقات ومن ابرز مخترعيها هم فريجه (Frege) وساندرز شارلز بيرس (Charles.S.Peirce) [٥] ويمكن ان ينظر لهذا النوع من المنطق بأنه واسطة أو أداة لتوسيع وتطوير المنطق الكلاسيكي حيث الاخير فشل في إثبات صحة استنتاجاته على عكس منطق الرتبة الاولى الذي أتبع نظاما متكاملا من الرموز وأدوات البرهنة والانساق الاستدلالية بالاضافة الى تطويره لنظام البرهنة والاستنتاج القديمة وتناوله لطرق اكثر صحة ودقة من المنطق الكلاسيكي[٦]

مكونات منطق الرتبة الاولى

في منطق القضايا أو منطق الجمل (statement logic) نختار أحد الحروف الابجدية الكبيرة مثل (A,B,C…etc) للتعبير عن القضايا فحينما نحول المثال اللغوي أو القضية البسيطة (أرسطو منطقي يوناني) الى : A أو نختار أي حرف أبجدي كبير أخر دون المساس بتركيب القضية الداخلي المؤلف من الموضوع (subject) والمحمول (Predicate) ،لكن في منطق الرتبة الاولى الوضع مختلف تماما فهذا

النوع من المنطق يكتب القضية برمزين الاول كبير وهو الذي نبتدأ به الصيغة والاخر حرف صغير يتبع الحرف الكبير فالحرف الكبير دلالة على المحمول والحرف الصغير يشير الى الموضوع وتكتب القضية السابقة (أرسطو منطقي يوناني) على النحو الاتي:La فإذا اردنا ربط قضيتين ولتكن (ارسطو منطقي يوناني) (Aristotel is logician) و(سقراط فيلسوف يوناني) (Socrates is philosopher) سنكتب الصيغة وفق هذا المنطق على النحو الاتي: La.Lb وهكذا فالحروف الكبيرة بمنطق الرتبة الاولى تعبير عن المحمولات أما الحروف الصغيرة فهي تعبير عن الموضوعات فكلا من ارسطو وسقراط موضوعات أما فيلسوف أو منطقي ونحو ذلك فهي اشارة للمحمولات ٧ والحقيقة أن الموضوع متغير والمحمول ثابت فعندما نكتب الصيغة الاتية: X=is greek وتعني ان المتغير (X) نستطيع ابداله بأي قيمة لتصبح القضية ذات معنى فعلى سبيل المثال يمكننا إبداله ب(أفلاطون) أو سقراط أو فيثاغورس او غيره فتصبح الصيغة الرياضية والمنطقية للقضية بهذا الشكل: Gsأو Ga فحرف ال (G) هو المحمول الثابت أما الحروف الصغيرة مثل (a) فهي اشارة لارسطو و(s) اشارة لسقراط ٨ وفيما يخص الروابط المنطقية في هذا النوع من المنطق فهي نفس الروابط المستعملة في منطق القضايا وعليه فمكونات منطق الرتبة الاولى ستكون على النحو الاتي:

١-الروابط المنطقية مثل النفي (Negation) ($\neg$) ورابطة العطف ($\wedge$) والبدل ($\vee$) والالزام ($\rightarrow$) والمساواة ($\Leftrightarrow$) .

٢-الاسوار الكلية (Universal quantifier) مثل السور الكلي ($\forall$) (Universal quantifier) والسور الجزئي (Existential quantifier)($\exists$)

٣-علامات التنقيط (punctuation marks) مثل الاقواس ( ) والفارزة .

٤-المتغيرات أو الموضوعات تكتب بالحروف الاتينية الصغيرة مثل (x,z…etc) أما الثوابت والمحمولات بالاحرف الاتينية الكبيرة كما وضحنا سابقاً .٩

العبارات المسورة في منطق الرتبة الاولى (Quantifiers in FOL)

هنالك تعبيرات وصيغ منطقية تستخدم للدلالة على (كم القضية)أي من ناحية (كل) أو (بعض) وتستخدم في الاقيسة المنطقية وعلى النحو الاتي :

المقدمة الاولى ....اي صديق لمارتن هو صديق لجون

المقدمة الثانية .... بيتر هو ليس صديق جون

النتيجة .... إذن بيتر هوليس صديق لمارتن

وكقولنا ايضا :

المقدمة الاولى ....كل البشر هم عقلاء

المقدمة الثانية .... بعض الحيوانات بشر

النتيجة ....إذن بعض الحيوانات عقلاء

فالصيغ المستخدمة مثل (أي) و (كل) و (بعض) هي اليات تجعل القضايا والعبارات المنطقية تحذو حذو القضايا والعبارات المسورة ولجعل هذه الصيغ المعقدة اكثر شفافية سنعمد الى استخدام الدالة الفريجوية (freegan function) وتكون على النحو التالي P(x) فالمعامل (x) هنا سيحمل كل خصائص (P) وعندها وعند كتابة الصيغة $(\forall x)P(x)$ ستعني إن الخاصية (P) تحمل كل (x) أو في تعبير أخر ان كل شيء له الخاصية (P) .وعلى الجانب الاخر اي الصيغة $(\exists x)P(x)$ تعني أن بعض المعامل (x) له خصائص (P) وهذا يعني ان هنالك على الاقل معامل واحد له الخاصية (P) فالصيغة الاولى $(\forall x)$ تسمى العبارة المسورة الكلية أو السور الكلي (universal quantifier) أما الصيغة الثانية $(\exists x)$ فتسمى بالسور الجزئي او العبارة المسورة الجزئية (existential quantifier) ١٠ ولكي نكتب العبارات المسورة السابقة بالصورة الصحيحة ضمن منطق الرتبة الاولى يجب علينا مراعاة التكوين الداخلي للعبارة في هذا النوع من المنطق فكما شرحنا سابقا ان الحرف الكبير يتقدم الحرف اللاتيني الصغير فالكبير للدلالة على المحمول والصغير على الموضوع فلكي نحول الصيغة (كل شيء بشر) (every thing is human) سنختار الحرف الكبير (H) للدلالة على المحمول اما المتغير (x) للدلالة على الموضوع فتصبح الصيغة رياضياً بالشكل الاتي : Hx: x

اي كأننا نقول اي شيء مفرد في هذا الكون هو بشري واذا وضعنا عبارة الكلية قبل العبارة السابقة كأننا نقول (كل البشر فانون)(all human are mortal) سنغير الصيغة السابقة ونكتبها بهذا الشكل الاتي: $(x)(Hx \rightarrow Mx)$ اي سنستعمل هنا رابطة الالزام المستخدمة في منطق القضايا $(\rightarrow)$ وكأننا نقول لكل شيء (x) اذا كان (x) بشر فإن (x) فان . فصيغة السور الكلي أو العبارات المسورة الكلية الموجبة تتطلب استعمالنا لرابطة الالزام وهي شرط اساسي لبيان كليتها والعبارة المسورة الجزئية تحتاج ايضاً لهذا الشرط السابق كقولنا (بعض الاشياء فانية) سنكتبها بهذا الشكل التالي $(\exists x)(Mx)$ وعندما نقول ان (بعض البشر فانون) (some humans are mortal) سنضطر هنا الى إستعمال رابطة الالزام ايضا فنقول كما يأتي : $(\exists x)(Hx \rightarrow Mx)$ وهذا يعني (بعض البشر فانون) (اذا كان هناك شيء يمثل البشر وهو (x) ومحموله H فأنهم فانون (Mx) ١١ وهذا الشيء ينطبق على العبارات المسورة الكلية المنفية والعبارات الجزئية المنفية كما يأتي : $(x)(Hx \rightarrow \neg Mx)$ أو من الممكن كتابتها على النحو التالي ١٢: $\neg (\exists x)(Hx \rightarrow Mx)$

الدوال والعلاقات السنتاكتية في منطق الرتبة الاولى :

أثرت هنا بيان المجال السنتاكتي (Syntactical) والبدء به قبل المجال السيمانتيكي (Semantics) والذي يعني التفسير والتأويل للصيغ الرياضية والمنطقية في عالم منطق الرتبة الاولى وقبل البدء ببيان المجال السنتاكتي من الضروري بيان مكوناته وهي على ما يأتي:

١ – المتغيرات (Variables) :لايختلف تفسير المتغير في منطق الرتبة الاولى عن غيره من انواع المنطق الرياضي ويستعمل أو تستعمل الحروف اللاتينية مثل (x,y,z...الخ)

٢- الثوابت (constants):في منطق الرتبة الاولى يفضل استعمال الحروف الاتينية مثل (a,b,c ...الخ)

٣-رموز المحمولات (:predicate symbols) :وتستعمل الحروف الاتينية الكبيرة مثل (P,Q,R ....الخ)

ومن الاساسيات السابقة الذكر سيتسنى لنا كتابة المصطلح أو (Terms) وهو التفسير الداخلي لكل قضية منطقية فيحوي هذا المصطلح على اساسيات ثلاثة وهي :

١-المتغير (variable)

٢-الثابت (constant)

٣-التطبيق الدالي (function application)١٣

والدالة (function) هي نوع من انواع العلاقات التي تربط متغير واحد مع غيره أو عدة متغيرات١٤ وعليه فالمصطلح السابق أو (Terms) من الممكن كتابته ووفق القواعد السابقة بهذا الشكل الاتي :

Brother(kingJohn; richardT heLionheart)

وتعني ان (جون أو الملك جون هو شقيق الملك ريتشارد قلب الاسد) ففي هذه الصيغة السابقة تحقق في المصطلح مايلي :جون وريتشارد هما اخوين ويعدان ثوابت (constants) أما الدالة في الصيغة السابقة فيعبر عنها ب(الاخوة)(Brother) فعلاقة الاخوة أو الابوة وغيرها تعبير دالي (Functional) مابين الاشخاص والحقيقة ان الصيغة السابقة خالية من اي متغير وتسمى هذه الصيغة في منطق الرتبة الاولى بالمصطلح الاساسي (ground term) اي الصيغة او المصطلح الذي يحوي الثوابت فقط. وكأمثلة اخرى على الدوال كقولنا الدالة أو العلاقة مابين الاشقاء غير الاخوة (وهم الاشقاء المختلفين الذين ينتمون لاب واحد)(Sibling) وتكتب بالصيغة التالية sibling(X, Y) أو علاقة أولاد العم (cousin) أو الاصهار وغيرها ومن الممكن ان تربط الدالة مع موضوع واحد كعلاقة اللون السمائي بالسماء وعلاقة الاعضاء بالجسم الواحد .وعلى ضوء ماتقدم من المكونات (الثوابت والمتغيرات والدوال بأنواعها احادية وثنائية) فإذا كانت (f) تمثل رمز الدالة الاحادية و(g) تمثل الدالة الثنائية وكلا من (a) و(b) يمثلان الثوابت أما (x) و(y) يمثلان كلا منهما متغيرا فصيغة المصطلح ستكتب بالشكل الاتي :١٥

f(g(a,x));g(f(x),g(x,y);g(a,g(a,g(a,b) 16

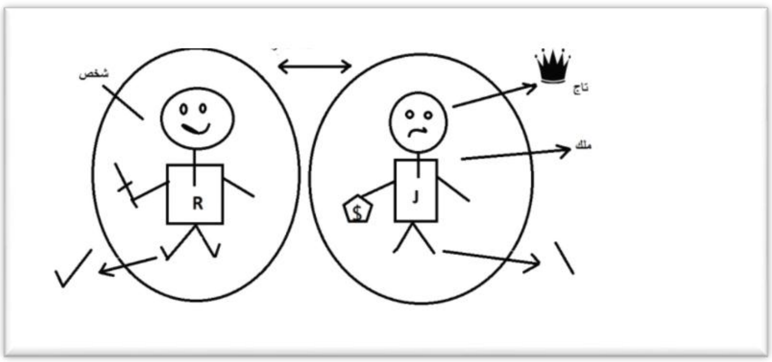
اما الروابط في منطق الرتبة الاولى فهي نفسها المستخدمة في منطق القضايا أو الجمل كما اشرنا سابقاً وهي النفي (negation) والعطف (conjunction) والالزام(implication) والبدل (disjunction) والمساواة (equivalence) فصياغة العبارات في منطق الرتبة الاولى يتكامل باستخدامه لتلك الروابط السابقة فلو فرضنا ان كلا من (φ ,ψ) جملا أو عبارات في منطق الرتبة الاولى فإن :(ψ ∨ φ) (ψ ∧ φ) ψ¬ (ψ ⇒ φ) (ψ ⇔ φ)هي عبارات ايضاً ولكن السؤال هنا يكمن في كيفية معرفة صدق أو كذب القضية أو العبارة المنطقية في هذا النوع من المنطق ؟١٧

للاجابة على هذا السؤال سوف نستعرض موضوع السيمانتيك والتفسير الدلالي للعبارات والصيغ والتي عن طريقها سنستخرج قيم الصدق والكذب .

السيمانتيك والنطاق والتفسير في منطق الرتبة الاولى

وددت هنا بيان معنى السيمانتك (semantics) واهميته في منطق الرتبة الاولى فهذا الطور يخلو من الرموز والصيغ الرياضية والمنطقية وكما قلنا سابقاً ان المصطلح يحدده ثلاثة مكونات وهي :الثوابت وتسمى ايضاً في هذا النوع من المنطق بالموضوعات (objects) والمحمولات ورموزها أو نسميها في هذا الطور بالعلاقات الحملية (predicate relation) (كون المحمول في القضية البسيطة لمنطق الرتبة الاولى يحدد علاقته بالموضوع أو الثابت وأخيراً الدوال فعلى سبيل المثال ان الصيغة الاتية : P(t1.........tn)

تسمى بالصيغة الذرية (atomic sentence) وتحوي محمولا (P) وهو يفسر العلاقة عن طريق الثابت (t) والدالة المرتبطة معه ١٨ ولكن يبقى السؤال هنا في كيفية تحديد صدق الصيغة أو عدمها ؟ للاجابة على هذا السؤال المهم ينبغي علينا اولا تحديد مفهوم ال (model) ١٩فهو الذي سيحدد معنى وصحة الصيغ والرموز والمصطلحات في منطق الرتبة الاولى اي نحن هنا في وسط تفسير وليس حكم قطعياً ونستطيع ببساطة ووضوح اكثر ان نبين النموذج أو model من خلال الرسم البياني لتصل الفكرة بصورة اسرع وأوضح وسأستعين بالمثال الذي أورده الاستاذ انريكو فرنكوني (Enrico Franconi)٢٠ في سلسلة



محاضراته في منطق الرتبة الاولى ففي الشكل ادناه يمثل أو تمثل الاشكال (شخصين وهما الملك رتشارد قلب الاسد وأخوه جون) وكلاهما يمثلان موضوعين وايضا اطرافهما كما هو مبين بالرسم (مثل الارجل وغيرها أما العلاقات (relations) التي تربط مابين الموضوعات فهي علاقة الاخوة بينهما (علاقة تناظرية) أما الدوال فهي العلاقات التي تربط كما موضح بالشكل مابين الموضوع والموضوع الاخر (الاطراف التي تنتمي للشخصين في الشكل).٢١

وكما اسلفنا ان التفسير (interpretation) سيكون صحيحا اذا كان النموذج سيكون صادقاً أو مكتوب بصيغة صحيحة (well formed) والتفسير يضم مكوناً مهماً وهو :النطاق (domain) وهو مفهوم مهم في منطق الرتبة الاولى ويرمز له بالرمز (Δ) وهو كل مايحوي مجموعات غير خالية (non empty set) أما التفسير فيرمز له بالرمز ($\mathcal{I}$) فلتحديد العناصر وتفسيرها والتي تنتمي لنطاق معين سنكتبه على النحو الاتي :

$$a^{\mathcal{I}} \in \Delta$$

أو نحدد علاقة المحمول في داخل النطاق على النحو الاتي :

$$P^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{n}$$

ففي الصيغة الاولى قمنا بتفسير الموضوعات أو الثوابت (constant) أو العناصر (elements) في (نظرية المجموعات) بإعتبارها تنتمي لنطاق المجموعات الغير خالية وفي المثال الثاني قمنا بتفسير المحمول وعلاقته بالنطاق (مجموعة جزئية) ضمن علاقة دالية (functional relation) يعبر عنها ب(n) كما يمكننا تعريف أو تفسير المصطلح الاساسي (ground term) بنفس الطريقة وعلى النحو الاتي : f

$$(t_1,\dots\dots,t_n))\ \mathcal{I} = f^{\mathcal{I}}\ (t_1{}^{\mathcal{I}},\dots\dots t_n{}^{\mathcal{I}})\ (\in \Delta)$$

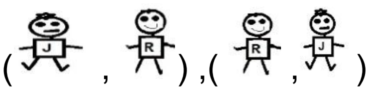
ويعني إن المصطلح الاساسي وكما ذكرنا سابقاً بأنه المصطلح الذي يحوي موضوعات فقط ولايحوي محمولات عليه فالتفسير ينطوي (بصحة كل موضوع ينتمي الى النطاق دون تمييز)[٢٢] وهذا يقودنا الى الية استخراج القيم الصادقة والكاذبة من خلال استخدامنا للتفسير السابق والياته ولنطبق هذا على المثال والمخطط السابق مابين (جون وريتشارد) ،ففي الخطوة الاولى سنقرر التفسير الاولي للموضوعين ولنبدأ بجون فنقول :

$\mathcal{I}$ (John) = ()

وفي الخطوة الثانية سنقوم بتفسير الموضوع الثاني وهو ريتشارد فنقول بالصيغة الرياضية :

$\mathcal{I}$ (Richard)=()

وفي الخطوة الثانية سنقوم بتفسير دالة الاخوة مابين ريتشارد وجون ووفق الصيغة الاتية :

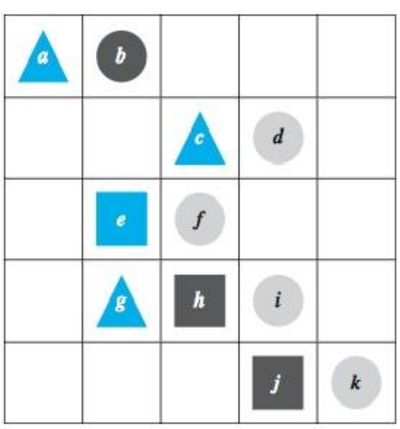
$\mathcal{I}$ (brother)={  ,......}

اذن سيكونان ريتشارد وجون اخوة وفق المعطيات السابقة (صيغة صادقة) وتكتب بالشكل الاتي:

V (brother (john,Richard), $\mathcal{I}$) = true

وعليه فالقيمة التي ستحدد العبارة أو المصطلح أو النموذج في منطق الرتبة الاولى سترتبط في تفسير المحتوى الداخلي فإذا صح هذا ستصبح صادقة ومن الممكن صياغة نظرية المساواة في منطق الرتبة الاولى بهذا الشكل الاتي: V (term -1=term -2 , $\mathcal{I}$)=true Iff $\mathcal{I}$ (term -1)= $\mathcal{I}$ (term-2)

وهذا يعني إن قيمة المساواة مابين المصطلح الاول والمصطلح الثاني تتحقق اذا تساوى تفسير المصطلح الاول مع تفسير المصطلح الثاني وهذه بالحقيقة مبدأ اساسي وأقصد مبدأ المساواه، يستخدمه هذا النوع من المنطق لاثبات صيغه الرياضية والمنطقية .[٢٣] وقد ابتكر الفيلسوف والرياضي البولندي الشهير تارسكي نموذجا لبيان معرفة واكتشاف قيم الصدق والكذب في منطق الرتبة الاولى عن طريق شكل يضم كل امكونات الاساسية لهذا المنطق من :نطاق ونموذج وموضوعات ومحمولات وعلاقات ..الخ وسنستعين هذا النموذج من الكتاب الشهير (discrete mathematics with applications) للمؤلف (SUSANNA S. EPP) في فصل المحمولات والعبارات



المسورة وكالاتي:

يحوي الشكل اعلاه على اشكال هندسية (مثلث ودائرة ومربع) والمثلث (a) و(c) و (g) يحملون اللون الازرق ،أما المربع (h) و(j) فيحملان اللون الاسود عدا (e)، اما الاشكال الدائرية فتحمل اللون الرمادي عدا (b) فنستطيع اخراج القيم الصادقة والكاذبة وفق مايأتي :

$\forall t$, Triangle$(t) \rightarrow$Blue(t).

العبارة أعلاه صحيحة كون كل المثلثات الموجودة في الشكل هي زرقاء

$\forall x$, Blue$(x) \rightarrow$Triangle(x).

العبارة اعلاه كاذبة (كل ماهو ازرق فهو مثلث) حيث اننا نلاحظ ان (e) ليس مثلثاً

$\exists y$ such that Square$(y) \wedge$ RightOf(d, y).

العبارة اعلاه صادقة (كون بعض الاشكال في المستوى العمودي للشكل هي اشكال مربعة مثل (e) و(h) ماعدا الشكل (d) على اليمين.

$\exists z$ such that Square$(z) \wedge$ Gray(z)

العبارة اعلاه كاذبة حيث تقول (بعض المربعات في المستوى العمودي للشكل هي باللون الرصاصي (وهذا الامر ليس صحيحاً لان كل المربعات هي إما زرقاء أو سوداء) .٢٤

وهكذا استطعنا معرفة القيم الصادقة والكاذبة عن طريق الية التفسير والمشاهدة ضمن النطاق السابق ووفق العلاقات والاشكال والألوان الموجودة في الشكل اعلاه وقد اخترت هذا الشكل البسيط لتارسكي لبيان معرفة قيم الصواب والخطأ في منطق الرتبة الاولى قبيل البدء بشرح الانساق الاستدلالية في منطق الرتبة الاولى .

القواعد الاستنتاجية المنطقية في منطق الرتبة الاولى :

قبل ان نشرع بالحديث عن القواعد الاستنتاجية لمنطق الرتبة الاولى نود بيان مصطلح مهم يستخدم في معظم حقول المنطق الرياضي الا وهو الصيغ صحيحة البناء أو مايسمى ب(WFF) وهو اختصار (well formed formula) وتعني الصيغ التامة أو صحيحة البناء والحقيقة ان هنالك قواعد متعارف عليها لكتابة الصيغ صحيحة البناء وهي على الوجه الاتي :

١-كل صيغة بسيطة (ذرية) في منطق الرتبة الاولى تحوي محمول مع متغير هي صيغة صحيحة البناء .

٢-اذا كانت (A) و(B) و(C) صيغ صحيحة البناء فإن $\neg$ A, (A $\wedge$B), (A $\vee$B), (A $\rightarrow$B), صيغ صحيحة البناء ايضاً .

٣-إذا كان (x) متغير ويمثل الموضوعات في النطاق و (A) صيغة صحيحة البناء فكذلك فإن الصيغ ($\forall$ x A)($\exists$ x A) صيغ صحيحة البناء ايضاً.٢٥

وقد اشرنا الى مكونات منطق الرتبة الاولى سابقاً وتركيبه الداخلي الذي يضم المصطلح والموضوع والمحمول والروابط والدوال وغيرها وأشرنا ايضاً في بداية بحثنا الى كيفية صياغة القضية البسيطة التي تتكون من الموضوع والمحمول وقلنا ان المحمول يسبق الموضوع في هذا النوع من المنطق وعليه فكتابة

الصيغ في هذا النوع من المنطق لامناص من الالتزام بالقواعد الصحيحة لانها ببساطة تقودنا الى كيفية التعامل والالتزام بقواعد الاستنتاج (rules of inferences) الخاصة بهذا النوع من المنطق ،والمعروف في منطق الرتبة الاولى انه يشابه الى حد كبير منطق القضايا في طرق الاستنتاج المنطقي ولكنه يختلف في ان لمنطق الرتبة الاولى بعض القوانين والبديهيات الخاصة بالاسوار وسنأخذ القوانين التي يعتمد عليها منطق الرتبة الاولى وأهمها :

١-قانون (Modeus ponens) أو مايسمى بقانون الاستلزام المنطقي وهو قانون بسيط يتكون من قضيتين ومقدمتين ينتج عنهما نتيجة لازمة ويستخدم في هذا القانون رابطة الشرط أو الالزام المنطقي فقط ويكتب بالصيغة الرمزية الاتية :

$$\frac{P \to Q,\ P}{\therefore Q}$$

٢-قانون (Resolution) :والحقيقة انني لم اجد له تسمية في الكتب الرياضية العربية وسأسميه (قانون الاقرار) وهو اقرب ترجمه له وهذا القانون فيه استنتاج مهم ويعود هذا القانون الى الفيلسوف والرياضي المعروف هيلاري بوتنام وينص رياضياً على مايأتي :

$$\frac{a \vee b, \quad \neg a \vee c}{b \vee c}$$

وكأن هذا القانون أو القاعدة تخبرنا ببطلان المقدمتين وتقودنا الى استنتاج نتيجة غير مشابهة للقوانين المنطقية الاخرى .

٣-قانون الغاء النفي (Negation elimination) أو يعرف بقانون نفي النفي أو النفي المضاعف لإثبات القضية و الصيغة المثبتة وقانونه ببساطة كما يأتي :

$P \Rightarrow \neg\neg P$ أو يكتب بالشكل الاخر المعكوس $\neg\neg P \Rightarrow P$

وهناك قانونين مهمين في هذا النوع من المنطق خاص بالاسوار وهما :

٤-قانون الغاء الكلية (Universal elimination) :وهذا القانون خاص بالسور الكلي وصيغته الرياضية :

$$\forall x\, A(x) \Rightarrow A(a/x),$$

ويسمى ايضاً بخاصية أو مميزات الكلية (universal specification) وهو قانون خاص بالمجاميع الجزئية والعناصر لمجموعة ويستنتج منه معظم الافراد والعناصر الجزئية لتلك المجموعات أو الصيغ.

٥-قانون الغاء الجزئية (.Existential elimination) :وهذا القانون مهم جداً في الغاء السور الجزئي وإستبداله ببديل اخر ٢٦ $\exists x\, P(x) \therefore P(f)$

وغيرها من القوانين المنطقية الاخرى التي تطول ولامجال لذكرها كلها هنا وقد اخترت القوانين اعلاه لاهميتها في الاستنتاج المنطقي والياته في منطق الرتبة الاولى وسأورد هنا مثال على الية الاستنتاج المنطقي ولنبدأ في هذا المثال من كتاب (power of logic) :

//كل البشر فانون

سقراط بشر

اذن احد ما فان

سنستعمل القوانين التي ذكرناها سابقا وسنحول الصيغة اللغوية السابقة الى صيغة رياضية (نرمز لسقراط بالرمز (x) وفان بالرمز (M) وللبشر بالرمز (H) ونستعمل البرهنة وعلى النحو الاتي :

1. $(x)(Hx \rightarrow Mx)$
2. $Hs \therefore (\exists x)\ Mx$
3. $Hs \rightarrow Ms$
4. Ms
5. $(\exists x)Mx$

نلاحظ اننا في الخطوة الثالثة استعملنا لقانون الغاء الكلية (Universal elimination) السابق الذكر أما في الخطوة الاولى استعملنا قانون الاستلزام المنطقي (modus ponens) وفي نهاية البرهان اثبتنا وعن طريق استخدامنا لقانون Existential Generalization (تعميم السور الجزئي) ٢٧ الى الانتقال من المثال الخالي من السور الى صياغة قاعدة تحتوي على سور جزئي واستطعنا اثبات ان هناك (بشر غير سقراط فان) عن طريق هذه القاعدة، وهذه عكس القاعدة الاخيرة سابقة الذكر وتتيح لنا استعمال السور في الحالات التي نستطيع اثبات شيء عن طريق استعمال السور الجزئي وبهذا استكملنا موضوعنا حول الية الاستنتاج المنطقي في منطق الرتبة الاولى وهو بالحقيقة موضوع في تفصيلات كثيرة ولاتنتهي وفيه تفرعات تؤدي الى مايسمى بمنطق الرتبة الثانية وهو الطور المتقدم من منطق الرتبة الاولى .

الهوامش

١) للاستزادة من الشرح المفصل حول موضوع (منطق الرتبة الثانية –second order logic) ينظر كتاب STEWART SHAPIRO, foundations without foundationalism, CLARENDON PRESS,Uk 1991,p.96)

٢) يعرفها جانغ (cc.chang) في كتابه (model theory) في مقدمته (ص١) الى ان هذه النظرية فرع من المنطق الرياضي وتتعامل مع اللغة الرمزية وتفسيراتها (formal language and its interpretations) أو مايسمى بالنماذج (Models)

٣) Stuart G.Shanker, Routledge History of Philosophy Volume IX,Routledge ,UK 1996 ,p 24

٤) هذا التعبير الشائع للصيغ المنطقية صحيحة البناء والمكتوبة وفق القواعد البنائية الصحيحة ووفق نظام منطقي ورياضي صارم ويُعد مندلسون من اشهر المؤلفين في هذا الموضوع

٥) Eric M. Hammer: Semantics for Existential Graphs, Journal of Philosophical Logic, Volume 27, Issue 5 (October 1998), page 489

٦) Stuart G.Shanker, Routledge History of Philosophy Volume IX, Routledge ,London 2004 ,p 32

٧) Frances Howard-Snyder-Ryan Wasserman, The Power of Logic, McGraw-Hill,new york 2005 ,p 420

٨)IBID :p.421

٩) Elliott Mendelson, Introduction to Mathematical Logic, Fourth Edition, CRC Press, US 1997,p. 57

١٠) Ibid :p .45

١١) Keith Allan, Concise Encyclopedia of Semantics, Elsevier, uk 2010,P. 771

١٢)هذه الصيغة والتي قبلها تعبير عن العبارة المسورة الكلية السالبة في منطق الرتبة الاولى ينظر Leigh S. Cauman, First-order Logic: An Introduction, new York ,p 155

١٣) Enrico Franconi,Foundations of First Order Logic, University of Manchester lectures on first order logic,London, brochure page 6 and also Dr. Alan Fern, First-Order Logic: Syntax and Semantics(lectures 2010) page 10

١٤) CHRISTOPHER CLAPHAM JAMES NICHOLSON,The Concise Oxford Dictionary of Mathematics,Oxford university press ,US 2009,p. 232

١٥) Melvin Fitting, First-Order Logic and Automated Theorem Proving, Springer Science & Business Media, US 1996,p .111

١٦) هذه الصيغة الرياضية للمصطلح ارتبطت بمتغيرين وثابتين ونلاحظ ان الدالة الاحادية ارتبطت مرة بمتغير وتارة اخرى استوعبت الصيغة في بدايتها (على اعتبار ان f(g(a,x) عوملت وكأنها متغير اما الدالة الثنائية فربطت تارة بين متغيرين وتارة بين ثابتين او متغير وثابت

١٧) منطق القضايا هو منطق ثنائي القيم اما صادق (true) أو كاذب (false) ويتحقق الصدق والكذب وفق اليات وجداول تسمى بجداول الصدق والكذب (truth table).

١٨) Frank Wolter, Handbook of Modal Logic, Elsevier publishing company, US 2006.p.556

(١٩)ارتبط هذا المصطلح بنظرية مهمة الا وهي نظرية النماذج (model theory) وهي النظرية التي تفسر وتدرس اللغات الرمزية وتأويلاتها

٢٠)استاذ علوم الكومبيوتر في جامعة مانشستر له العديد من المؤلفات في مجال معلومات الشبكات والمنطق الوصفي وغيرها

٢١) Enrico Franconi, Foundations of First Order Logic, Department of Computer Science, University of Manchester, Syntax and Semantics(lectures 2010) page 11

٢٢) Dr. Alan Fern, First-Order Logic: Syntax and Semantics(lectures 2010) page 10

٢٣) Mordechai Ben-Ari, Mathematical Logic for Computer Science, Springer Science & Business Media, 2012,p.22-23

٢٤) Susanna S. Epp, Discrete Mathematics with Applications, Richard Stratton publishing, Canada 2011 ,p .105

٢٥) Elisabeth S.C. Berger, Andreas Kuckertz, Complexity in Entrepreneurship, Springer,US 2016,p 141

٢٦) Christopher S. Hill, Thought and World: An Austere Portrayal of Truth, Cambridge University Press, UK 2002,p 125

٢٧) Frances Howard-Snyder-Ryan Wasserman, The Power of Logic, McGraw-Hill,new york 2005 ,p 449

المصادر والمراجع

CHRISTOPHER CLAPHAM JAMES NICHOLSON,The Concise Oxford Dictionary of Mathematics,Oxford university press ,US 2009

Christopher S. Hill, Thought and World: An Austere Portrayal of Truth, Cambridge University Press, UK 2002

Dr. Alan Fern, First-Order Logic: Syntax and Semantics(lectures 2010)

Elisabeth S.C. Berger, Andreas Kuckertz, Complexity in Entrepreneurship, Springer,US 2016
Elliott Mendelson, Introduction to Mathematical Logic, Fourth Edition, CRC Press, US 1997
Enrico Franconi, Foundations of First Order Logic, Department of Computer Science, University of Manchester, Syntax and Semantics(lectures 2010)
Enrico Franconi,Foundations of First Order Logic, University of Manchester lectures on first order logic,London, brochure page 6 and also Dr. Alan Fern, First-Order Logic: Syntax and Semantics(lectures 2010)
Eric M. Hammer: Semantics for Existential Graphs, Journal of Philosophical Logic, Volume 27, Issue 5 (October 1998)
Frances Howard-Snyder-Ryan Wasserman, The Power of Logic, McGraw-Hill,new york 2005
Frances Howard-Snyder-Ryan Wasserman, The Power of Logic, McGraw-Hill,new york 2005
Frank Wolter, Handbook of Modal Logic, Elsevier publishing company, US 2006
Keith Allan, Concise Encyclopedia of Semantics, Elsevier, uk 2010
Melvin Fitting, First-Order Logic and Automated Theorem Proving, Springer Science & Business Media, US 1996
Mordechai Ben-Ari, Mathematical Logic for Computer Science, Springer Science & Business Media, 2012
Stuart G.Shanker, Routledge History of Philosophy Volume IX, Routledge ,London 2004
Stuart G.Shanker, Routledge History of Philosophy Volume IX,Routledge ,UK 1996
Susanna S. Epp, Discrete Mathematics with Applications, Richard Stratton publishing, Canada 2011